

CAPÍTULO**4****Aplicação de
Derivadas****Objetivos Deste Capítulo**

Usar as idéias do cálculo diferencial para solucionar problemas em:

1. Variação linear
2. Distancia versus tempo
3. Força versus extensão de uma mola
4. Resistência versus corrente
5. Voltagem versus carga
6. Energia versus temperatura
7. Economia: juros e principal
8. Variação quadrática
9. Distancia versus tempo
10. Energia versus velocidade
11. Potência versus corrente
12. Razão de mudança da área com o raio de um círculo
13. Variação de Ordem Superior
14. Variação inversa
15. Variação trigonométrica
16. Variação exponencial
17. Máximo e mínimo

Comandos do Maple Usados Neste Capítulo

$C := 1e-13$; Notação e do Maple para potências de 10.

$D(s)(1)$; Operador diferencial D aplicado a função (s) e avaliada no ponto 1.

$\text{evalf}(\text{subs}(k = 1093.75, x0 = 0.05, D(F)(0)))$; Os comandos evalf e subs , aplicados ao resultado da aplicação do operador diferencial à função F , e avaliada em 0.

$\exp(V/0.027)$; Notação do Maple para a função exponencial.

$F := x \rightarrow \text{if } x > 1 \text{ then } 4 - x^2 \text{ else } x + 4 \text{ fi}$; O comando if como parte da definição de uma função definida em partes.

$\text{fsolve}(D(f)(x) = 0)$; Solucionar uma equação numericamente.

$\text{plot}(s, 0 .. 6)$; A forma do comando plot quando s é uma função ao invés de uma expressão.

$S := t \rightarrow 30*t - \frac{1}{2}*9.8*T^2$; $s(1)$; Nomeando s como função de t e avaliando-a no ponto $t = 1$.

$\text{solve}(e4, \{t\})$; O comando solve . Esta forma do comando faz com que o Maple escreva a resposta na forma de uma equação em t .

$\text{solve}(\text{subs}(F = 35, x = 3.2/100, F = k*x), \{k\})$; Um exemplo do uso do comando subs .

$\text{subs}(x = \text{sols}[3], D(f)(x))$; O comando $\text{sols}[3]$ seleciona a terceira expressão na sequência chamada sols .

$v[t = 3*\text{seconds}]$ A notação table , usada aqui para subscrição.

Variação Linear

O tópico de variação linear muito pouco utiliza o cálculo, mas é um bom assunto para você começar a estudar as aplicações que contêm as noções de mudança. No primeiro caso, considere qualquer definição da física que trata da de alguma propriedade intrínseca da matéria. A definição da propriedade deve ser um número que pode ser posto em um manual

de forma que seja o mais útil possível. Vamos pegar o exemplo específico da propriedade da matéria chamada *calor específico*. O calor específico de uma substância é a medida de quanta energia é necessária para mudar a temperatura de um material.

Existem várias possibilidades de como construir uma definição funcional. Talvez um cientista tenha concluído que sejam necessários 2.000 joules para aquecer uma pepita de um mineral de 20 graus Celsius para 25 graus Celsius. Como resultado das medidas experimentais, o cientista poderia dizer que o calor específico do mineral é de 2.000 joules pois esta é a quantidade de energia necessária para mudar a temperatura. Este número, especificamente 2000 joules, deve estar em um manual? A resposta é não, pois este número está atribuído a uma situação particularmente definida. E se duas pepitas iguais do mesmo material forem usadas? Considerando que a nova pepita precisa de 2.000 joules para ser aquecida pelo mesmo intervalo de temperatura você percebe que o número que deve ser escrito no manual é a quantidade de calor, em joules, que é necessária para aquecer a massa unitária da substância. Com um número como este no manual você poderia facilmente determinar a energia necessária para aquecer qualquer massa de substância: Multiplique a massa pelo número no manual, que é o calor específico de uma unidade de massa. O argumento se aplica à temperatura também. Se é necessária uma determinada quantidade de joules para aquecer uma substância um grau Celsius, você pode concluir que é necessário o dobro deste valor para aquecer a substância dois graus Celsius. (Perceba que isto é uma conclusão – não há uma razão para que isto tenha que acontecer.)

Chegando as duas conclusões a respeito da massa e a variação de temperatura, você linearizou o problema de determinar quanto calor é necessário para aquecer a substância. Ou seja, você usou o raciocínio proporcional. A maioria das pessoas utilizam o raciocínio proporcional e aplicam a linearização quando fazem uma tentativa de solucionar um problema completamente novo. Aqui está o que conseguimos: A definição do calor específico é a quantidade de calor necessária para aquecer a unidade de massa de uma substância em 1º.C. Em símbolos o calor específico de uma substância é definido assim:

$$c = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \frac{1}{m} \quad (4-1)$$

onde c é o calor específico, m é a massa da substância em quilogramas, ΔQ a quantidade de calor necessária, e ΔT é a variação de temperatura. Veja que isto é uma definição. Para que a definição seja útil, o valor de c que vai no manual deve ser adequado para várias temperaturas. Não é garantido que o resultado do mesmo valor de c funcione corretamente para a variação de 0º.C para 1º.C e também para a variação de 99.5º.C para 100.5º.C. Na verdade se o material for água, a quantidade de calor necessária para mudar a temperatura de 99.5º.C para 100.5º.C é enorme se comparada a quantidade de calor necessária para mudar a temperatura de 0º.C para 1º.C. A razão é que a água evapora em 100º.C (ao nível do mar), e uma grande quantidade de calor é necessária

para transformar a água de líquido para vapor. Esta energia adicionada a uma relativa pequena quantidade de calor que é necessária para mudar a temperatura.

Não vamos nos afundar nas exceções à regra. E considere que como fato que para a água nas temperaturas entre 10°.C e 50°.C, o calor específico é $c = 1$ caloria(cal) por grama (gm °C).

Exemplo 4-1

Calcule o número de joules de energia calórica necessários para elevar a temperatura de um tanque contendo 3.000 Kg de água (uma pequena piscina) de 16 °C (bem frio) até 28°.C (temperatura confortável).

Resolução: Antes de aplicar a equação 4-1, precisamos converter o calor específico da água para números em quilogramas e joules. Considerando que 1 cal = 4.1818 J e 1Kg = 1,000 , o calor específico é

$$c = 1 \frac{\text{cal}}{\text{gm} \cdot ^\circ\text{C}} \times 4.18 \frac{\text{J}}{\text{cal}} \times 1000 \frac{\text{gm}}{\text{Kg}} = 4,186.8 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}}$$

N's substituímos os números dados depois de resolver para ΔQ , e arredondaremos a resposta pois presumimos que volume do tanque é 3000 Kg:

$$\Delta Q = mc\Delta T$$

$$\begin{aligned} \Delta Q &= 3,000 \cdot 4,186.8 \cdot (28-16) \\ &= 1.5 \cdot 10^8 \text{ J} \end{aligned} \quad (4-2)$$

O exemplo mostra a utilidade de definir quantidades físicas como o calor específico de substancias de forma que elas possam ser usadas para qualquer massa de material em qualquer intervalo de temperatura aceitável.

Do ponto de vista do cálculo, observe que a definição do calor específico contém a quantidade $\Delta Q/\Delta T$. No limite esta é a derivada, dQ/dT . Se esta quantidade fosse conhecida para um grande intervalo de temperaturas, a quantidade de calor necessária para mudar a temperatura de uma substancia, mesmo que varie com a temperatura, poderia ser calculada. Você verá como faze-lo no capítulo 6, em aplicações de integrais.

Sua vez: Cientistas de materiais sabem que a capacidade de resistência de um material é a propriedade que permite que seja calculada a resistência de um cabo. Por exemplo, o cobre tem um capacidade de resistência de 0.003 ohms por metro. A resistência do cabo de cobre é achada usando a fórmula $R = rA/L$, onde R é a resistência em ohms, r é capacidade de resistência em ohms por metro, e L é o comprimento do cabo. Veja que a geometria do cabo não aparece

na definição da capacidade de resistência. A resistência de qualquer cabo em particular é calculada usando sua área e comprimento da seção de choque, juntamente com o valor de resistividade do material.

Qual a resistência de 40km de uma linha de transmissão de um cabo de cobre de área da seção de choque de 0.004 metros quadrados?

Resposta: _____

Distância Versus Tempo

O estudo detalhado de movimento se tornou possível apenas após a descoberta do cálculo, que é necessário para entendermos vários conceitos relacionados a movimento. O primeiro destes conceitos é a definição de velocidade instantânea. Esta quantidade é derivada de uma mais simples, chamada velocidade média. Por exemplo imagine que você está numa viagem de carro. Você viaja de casa para a praia, uma distância de 50 milhas. A viagem leva duas horas. Por definição a velocidade média desta viagem é a razão entre a distância percorrida e o tempo tomado. Se usarmos os símbolos v para a velocidade média, Δx para a distância percorrida, e Δt para o tempo tomado, então a fórmula de velocidade média é

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4-3)$$

Usamos os símbolos Δx e Δt para as variáveis de distância e tempo para lembrar que este é o intervalo de tempo para a correspondente mudança na distância que é vital para a fórmula. Ou podemos dizer que, Δt é a diferença de tempo, tempo final menos tempo inicial.. Por exemplo a velocidade média do carro é $50/2 = 25$ milhas por hora. Qual o significado deste resultado? Você poderia ter viajado quase toda a viagem a 65 milhas por hora mas, parou para almoçar em um restaurante. Ainda que a velocidade do carro fosse 65 milhas por hora quando você parou o carro também parou. O significado do resultado pode ser compreendido imaginando outro carro fazendo a mesma viagem, saindo de casa na mesma hora, chegando na mesma hora mas, viajando mais devagar. Obviamente, um carro a uma velocidade constante de 25 milhas por hora leva duas horas para percorrer 50 milhas. Este carro chegaria à praia no mesmo momento que você.

Logo, a definição de velocidade média dá a informação sobre quão rápido um objeto deve ir, mas fornece apenas uma taxa constante de velocidade, se o objeto cobre uma distância em um dado tempo. A velocidade média de um objeto, mesmo que sua velocidade varie, pode ser achada

pelo uso da equação 4-3. Tudo que importa é a distância total percorrida e o tempo tomado total.

Existem varias situações onde a velocidade média não é aplicável. Por exemplo, se você for parado por excesso de velocidade por estar a 65 milhas por hora numa área de máximo de 45 milhas por hora, não ajudará em nada dizer que a sua velocidade média durante as duas ultimas horas foi de 25 milhas por hora! O caso de obedecer o limite de velocidade instantânea que controla a situação. Mas como é esta quantidade, velocidade instantânea, definida? É o limite da razão $\Delta x / \Delta t$ quando t se aproxima de zero. O símbolo para velocidade instantânea é v , e a fórmula é

$$V = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (4-4)$$

A definição mostra que v é uma derivada. É a derivada de x em relação a t . Vamos examinar a situação por meios de um gráfico. Uma pessoa passeia correndo, e andando sem Constância como mostrado na Figura 4.1. O tempo levado é mostrado pelo eixo x , e o eixo y dá a distância percorrida.

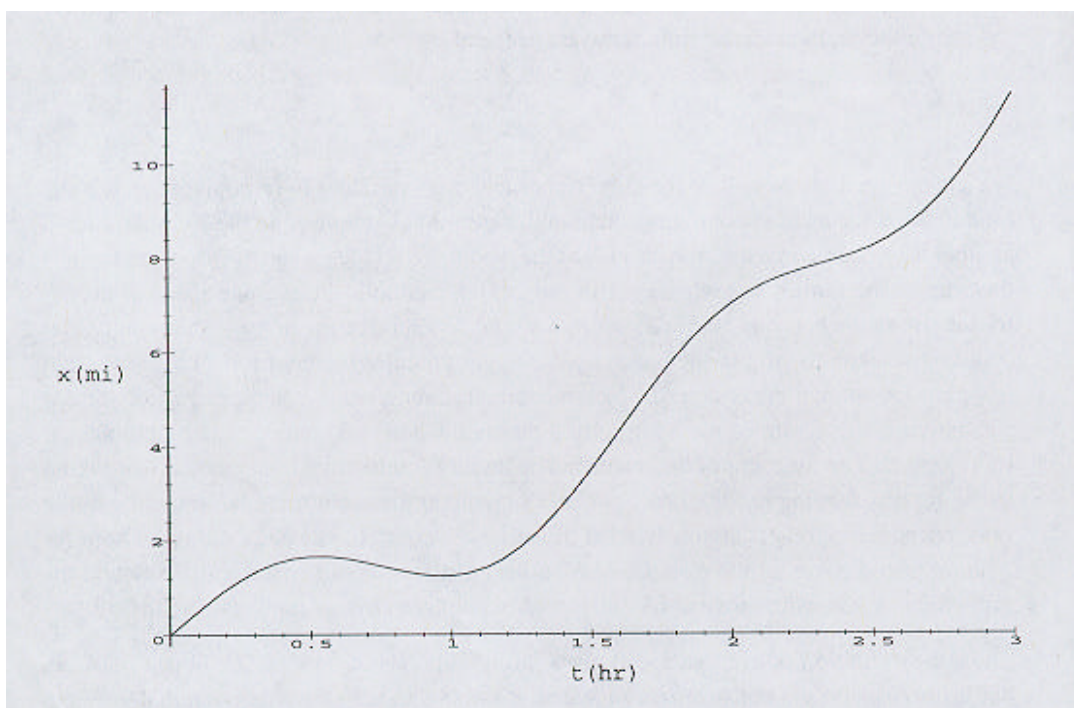


Figura 4.1 O Gráfico tempo-distância.

Exemplo: 4-2: Achando algumas velocidades médias

- (a) Aproximadamente qual a velocidade média da primeira meia hora?
- (b) Qual a velocidade média durante a segunda meia hora?
- (c) Qual a velocidade média durante a primeira hora?

Resolução:

(a) A distância percorrida durante a primeira meia hora é aproximadamente 1.6 milhas. Logo pela equação 4-4, a velocidade média é $1.6/0.5 = 3.2$ milhas por hora. Durante este tempo, a pessoa estava esquentando dando uma caminhada.

(b) Durante a segunda meia hora, a distância percorrida é negativa. Ao início da meia hora, a pessoa está no ponto $x = 1.6$ milhas, e ao fim deste período, ela está em $x = 1.2$ milhas. Logo a distância percorrida é $1.2 - 1.6 = -0.4$ milhas. A velocidade média é $-0.4/0.5 = -0.8$ milhas por hora (talvez a pessoa tenha decidido dar meia volta e ir para casa).

(c) Durante a primeira hora, a definição da velocidade média nos diz para usar 1.2 milhas como a distância total percorrida, já que esta é agora a distância do ponto de partida, e usar 1 hora como o tempo tomado. A velocidade média deste deslocamento é $1.2/1 = 1.2$ milhas por hora. Note que a velocidade média para a hora completa não é a soma das duas médias.

Sua vez. Qual a velocidade média durante o período de 0 a 2 horas?

Resposta: _____

A pessoa decide não ir para casa. Pelo contrario, dá a volta e começa a correr. Corre cerca de uma milha, entre os pontos $x = 1.2$ e $x = 2.2$ milhas. Vamos determinar a velocidade instantânea da pessoa no momento $t = 1.5$ horas. A curva tempo distância parece linear neste ponto do intervalo. Vamos ver se é verdade passando uma linha reta pelo momento 1.5 horas. Isto é mostrado na figura 4.2.

A linha tangente se aproxima bastante do intervalo tempo $t = 1.5$. A inclinação desta linha é dx/dt ; logo, esta é a velocidade instantânea em $t = 1.5$. Você pode descobrir a inclinação medindo os comprimentos da base e da altura do triângulo da Figura 4.2. A base é $1.5 - 1.05 = 0.45$ horas, e a altura é 3.5 milhas. A velocidade instantânea é $3.5/0.45 \approx 7.8$ milhas por hora. O corredor ainda não está muito rápido. (Talvez ele tenha machucado o calcanhar).

Achamos a velocidade instantânea medindo a distância e o tempo. Isto é aceitável? A resposta é sim, pois medimos a inclinação da linha tangente. Já que

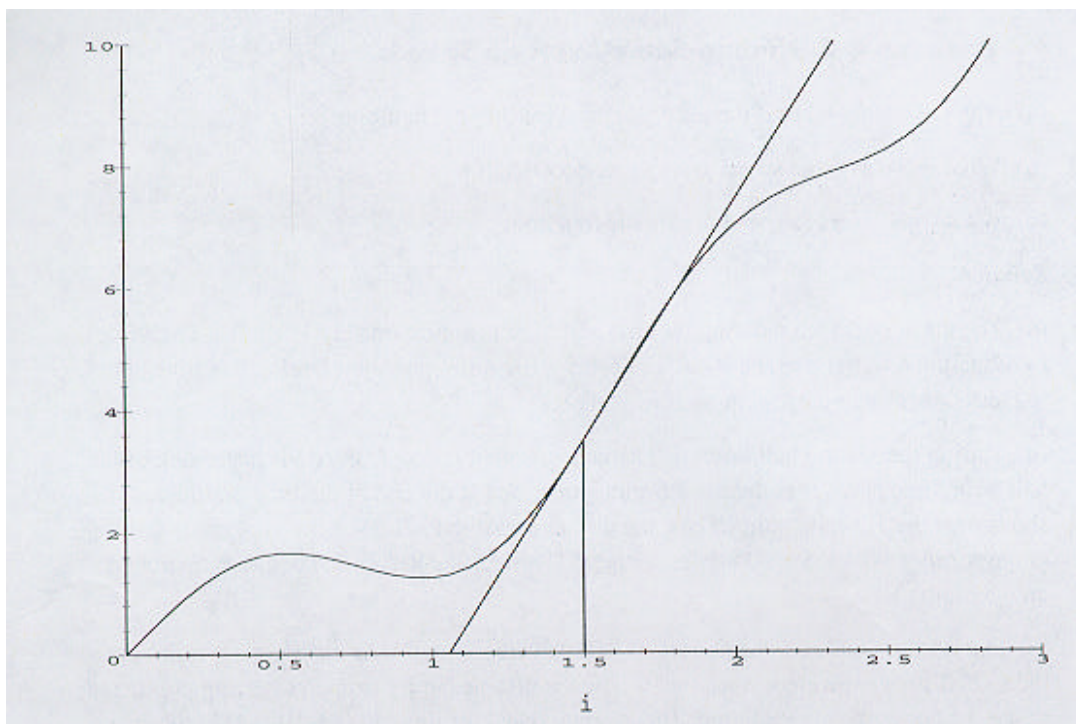


Figura 4.2 A tangente do gráfico tempo distância em $t = 1.5$ horas.

todos os triângulos construídos nesta linha terão a mesma inclinação, podemos escolher qualquer um. Poderíamos ter usado um triângulo maior para fazer nossas medições mais fáceis e mais precisas. Se estiver tirando medidas de um gráfico, é uma boa idéia usar a maior figura possível.

Se quisermos mais precisão do que o gráfico pode nos dar, precisamos de uma fórmula que relacione distância ao tempo. Precisamos fazer de x uma função de tempo. Esta não é uma tarefa simples no caso de nosso corredor. Mesmo que ele estivesse seguindo um plano, existem muitas variáveis para fazer a derivação de uma fórmula para a distância como uma função do tempo. Podemos olhar outras situações onde fórmulas podem ser alcançadas. Um caso clássico é de um objeto caindo.

Exemplo 4-3: A Velocidade de um Objeto em Queda

A física nos diz que a relação distância tempo para um objeto caindo sob a influência da gravidade é

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

onde s é a distância percorrida, v_0 é a velocidade inicial, a é a aceleração devido a gravidade, e t é o intervalo de tempo. No sistema internacional de unidades (SI), s é medido em metros, $a = 9.8 \text{ m/s}^2$, e t medido em segundos. A quantidade v_0 como velocidade inicial, significa a velocidade do objeto quando $t = 0$.

(a) Se uma bola for jogada para cima em linha reta com uma velocidade inicial de 30 m/s, qual será a sua altura após 1 segundo?

(b) Qual será sua altura após 5.1 segundos?

(c) Qual a velocidade após 1 segundo; e após 5.1 segundos?

Resolução: Vamos montar o problema de forma que possa ser resolvido pelo Maple. Podemos expressar a relação distância – tempo como uma função.

>s := t->30*t-1/2*9.8*t^2;

$$s := t \rightarrow 30t - 4.900000000t^2$$

(a) Já que s é uma função de t , a distância em $t = 1$ é $s(1)$.

>s(1);

25.10000000

(b) Da mesma forma a distância em $t = 5.1$ segundos é $s(5.1)$.

>s(5.1);

25.5510000

A bola subiu 25.1 metros após 1 segundo. O que aconteceu que em 5.1 segundos ela estava apenas 25.55 metros? Se você não percebeu imediatamente vai ficar mais claro quando você calcular a derivada da função e calcular nestes dois momentos. Já que a derivada é dx/dt , ela representa a velocidade da bola nestes tempos.

(c) As velocidades são:

>D(s)(1);

20.2000000

D(s)(5.1);

-19.9800000

Em 1 segundo a velocidade é positiva, e em 5.1 segundos a velocidade é negativa. Em $t = 1$, a bola está subindo, visto que em $t = 5.1$ a bola está descendo. Em algum momento 1 segundo e 5.1 segundos, a bola chega a sua altura máxima. Aí começa a cair em direção à terra.

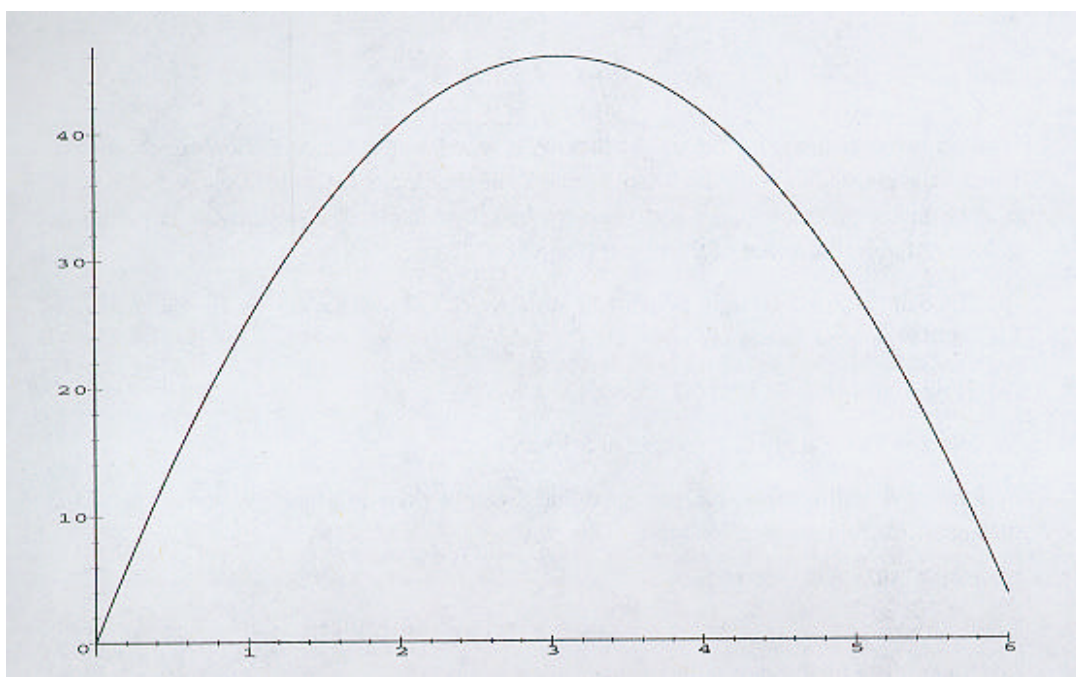


Figura 4.3 Gráfico para o exemplo 4-3

Em $t = 5.1$ segundos, a bola está próxima ao chão novamente. Esta é a razão de s ser quase igual a $t = 1s$.

Para ter uma visualização melhor do problema, desenhe o gráfico para a relação espaço-tempo.

>plot(s, 0 .. 6);

No gráfico, você pode ver que a bola retorna para o chão logo após a marca dos seis segundos e alcança a altura máxima de 46 metros no momento de três segundos após ter sido jogada (Figura 4.3).

O exemplo mostra como aplicar o cálculo ao problema de achar a velocidade de um objeto, dada sua distância, como uma função de tempo. Também é possível achar sua altura máxima fazendo a seguinte observação: no topo de sua trajetória, a velocidade instantânea da bola tem que ser zero. Veja o formato do gráfico. A inclinação da linha tangente é zero no ponto máximo. Em símbolos, $dx/dt = 0$. Para achar o tempo no qual a altura é a máxima, resolva a equação

```
>e4 := D(s)(t) = 0;
```

$$e4 := 30 - 9.900000000t = 0$$

A equação é derivada por igualar a função de distancia a zero. A derivada será avaliada no tempo representante., t. A solução é

```
>solve(e4, {t});
```

$$\{t = 3.061224490\}$$

A solução analítica indica que a bola alcança a altura máxima logo após $t = 3s$. Isto está de acordo com a nossa solução gráfica, onde estimamos a altura máxima no tempo de 3s.. Para achar a distância, substitua este tempo na função s.

```
>s(3.06122);
```

$$45.91836735$$

Você não precisar digitar todos os dez dígitos. A informação do problema foi dada em dois dígitos, logo a resposta deve ser dada na mesma precisão. A altura é aproximadamente 46 metros.

Também podemos encontrar o tempo total da trajetória. Podemos argumentar que o tempo de ascendência é igual ao tempo de descendência, ou podemos resolver a equação para tempo da distância total, do ponto de partida até zero. Aqui está a solução encontrada quando ajustamos a distância para zero.

```
>solve(s(t) = 0, {t});
```

$$\{t = 0\}, \{t = 6.122448980\}$$

Existem duas soluções. A primeira, $t = 0$, diz que a altura da bola é inicialmente zero. A outra solução é a que estamos procurando. Nos diz que a bola cai no chão 6.1 segundos em sua trajetória. Este valor coincide com a Figura 4.3, onde $s = 0$ em $t = 0$ e também em um momento após 6s.

A velocidade pode ser achada a qualquer momento avaliando a derivada de s em relação a t naquele momento. Em $t = 3$ segundos, a velocidade da bola é

```
>v[t = 3*seconds] = D(s)(2)*`meter per seconds`;
```

$$v_t = 3 \text{ seconds} = 10.40000000 \text{ meters per second}$$

Mais uma vez usamos os colchetes após a variável v simplesmente para produzir uma resposta bem apresentável. A velocidade em $t = 3$ segundos é 10.4 m/s. É importante usar a crase (') já que isto é uma variável até onde o Maple entende e contém espaços. Elas informam Maple que a frase deve ser tratada como um objeto. Você não tem que escrever a solução desta forma tão elaborada,

mas pode ser interessante usar esta técnica num relatório formal. O exemplo está incluído aqui apenas para mostrar como funciona.

Força Versus Extensão de um Mola

Uma mola produz uma força de retorno quando é esticada. Uma mola *ideal* produz uma força que é estritamente proporcional à sua extensão. A fórmula para esta força é

$$F = kx \quad (4-6)$$

Onde F é a força de retorno em Newtons; x é a extensão, ou deslocamento, da mola em metros; e k é a constante de proporcionalidade, chamada de constante da mola.

Exemplo 4-4: Calculando a constante da mola.

Ache a constante da mola, k , se uma força de 35 Newtons estende a mola por 3.2 centímetros.

Resolução: Já que este é um problema linear, a constante da mola é realmente uma constante. Pode ser calculada resolvendo a equação 4-6 para k e depois substituindo os valores dados para F e x . Aqui está uma linha do Maple que resolve a situação. Leia os comandos de dentro para fora para entender como ele chega à solução.

```
>solve(subs(F = 35, x = 3.2/100, F = k*x), {k});
```

```
{k = 1093.750000}
```

Sua vez. Quais são as unidades de k ?

Resposta: _____

(b) Por que nós dividimos o valor de x por 100 no comando do Maple?

Resposta: _____

(c) Quanta força, em Newtons, é necessária para esticar a mola a uma distância de 4.5 cm?

Resposta: _____

Exemplo 4-5: Quando a constante da mola não é uma constante.

Molas reais não podem obedecer a simples lei da equação 4-6. Uma das razões é que não forma feitas restrições ao deslocamento x , visto que uma mola real não pode ser estendida indefinidamente.

Um comportamento possível de uma mola real é que a força de retorno distorce a mola em grandes deslocamentos. Vamos aceitar uma equação mais realística para a mola no intervalo $0 < x < 1$ sendo

>F := x->k*x*(exp(-(x-x0))));

$$F := x \rightarrow kxe^{-(x-x_0)}$$

Onde k é o mesmo que no exemplo 45 e x_0 é 0.05. Podemos definir uma constante da mola efetiva para pequenos deslocamentos. Não é mais k , mas pode ser definida como dF/dx . Para pequenos deslocamentos ao redor da extensão x dF/dx será a constante de força efetiva. Se for multiplicada pelo pequeno deslocamento, Δx , vai produzir uma força incremental Δf .

(a)Qual a constante da mola efetiva em $x = 0$?

(b)Qual a constante da mola efetiva em $x = 0.8$?

Resolução:

(a)

>evalf(subs(k = 1093.75, x0 = 0.05, D(F)(0)));

1149.827761

(b)

>evalf(subs(k = 1093.75, x0 = 0.05, D(F)(0.8)));

103.3301834

Em $x = 0$, a constante da mola é quase a mesma que no exemplo anterior, porém quando a extensão x se torna grande, a constante efetiva da mola se torna menor. Isto significa que é necessário menos força extra para estender a mola uma pequena quantidade em 0.8 metros do que é necessário para fazê-lo em 0 metros. A constante efetiva da mola se tornou bem mais fraca.

Sua vez.

(a)Ache a constante efetiva da mola em $x = 1$ metro.

Resposta:_____

(b)O que acontece se a constante da mola for $x > 1$ metro?

Resposta:_____

Resistência Versus Corrente

Na década de 1820, George Ohm surpreendeu o mundo científico sugerindo que a corrente elétrica através de um material é proporcional a voltagem aplicada. Ele descobriu que a regra era

verdadeira para uma determinada classe de materiais numa grande variação de voltagens. Hoje em dia esta regra é conhecida como lei de Ohm. Muito mais é conhecido a respeito de ciência de materiais nos dias de hoje, e há muitos exemplos que fogem à lei de Ohm. Vamos examinar um caso onde a lei se aplica, e usaremos o cálculo para investigar a relação entre corrente e voltagem onde a lei já não se aplica.

Exemplo 4-6: O Resistor

O resistor é um dos componentes mais comuns na tecnologia eletro-eletrônica. Hoje estes dispositivos são desenhados e construídos de forma que obedeçam a lei de Ohm para seus raios de operação planejados. Se V é a voltagem aplicada em volts e i é a corrente através do dispositivo em ampères, então a lei de Ohm é dada pela relação linear

$$V = Ri \quad (4-7)$$

A constante de proporcionalidade é R ; ela representa resistência em ohms. O componente em si é chamado de resistor. Geralmente quando se fala de um resistor significa algo que obedece a lei de Ohm.

(a) Ache a voltagem por um resistor quando a corrente é de 116 miliamperes se uma voltagem aplicada de 25 volts causa uma corrente de 53.2 miliamperes (1 miliamper = 10^{-3} amperes)

(b) Um resistor tem a resistência de 22 kilohms (1 kilohm = 1000 ohm's). Ache a corrente através deste se a voltagem aplicada é de 12 volts.

Resolução:

(a) A resistência pode ser encontrada com a informação que uma voltagem aplicada de 25 volts causa uma corrente de 53.2 miliamperes. Usando a fórmula para a lei de Ohm e resolvendo para R , $R = V/i = 25/53.2 = 0.47$ Kilohms. Perceba que no cálculo nós usamos a corrente em miliamperes para obter uma resistência em kilohms. Você deveria refazer os cálculos convertendo a corrente em amperes para obter a resistência em ohms. Você terá o mesmo resultado, logo, demonstrando a precisão de nosso atalho.

Aplique a lei de Ohm mais uma vez para achar a voltagem através do resistor quando a corrente passando é de 116 miliamperes. $V = 470 \cdot 116 \cdot 10^{-3} = 55$ V.

(b) Novamente lei de Ohm, $12 = 22i$, $i = 12/22 = 0.55$ miliamperes

Sua vez Escolha um resistor de forma que uma corrente de 25 miliamperes passe por ele quando a voltagem é 110 volts. Qual o valor da resistência necessário?

Resposta: _____

Exemplo 4-7: O Resistor Não – Ôhmico.

Os dispositivos elétricos que não obedecem a lei de Ohm são chamados de não Ôhmicos. Um destes dispositivos sólidos mais comuns é o diodo. A relação entre a corrente e a voltagem em um diodo é dada pela relação

$$i = I_s(e^{v/v_0} - 1) \quad (4-8)$$

Onde I_s é um número pequeno, talvez 10^{-13} , e v_0 é 0.025.

O diodo pode ser posicionado a um ponto operante aplicando a voltagem fixada através de seus terminais. A chamada voltagem corrente direta (CD) faz com que a corrente flua. A quantidade de corrente é determinada pela equação 4.8. Uma pequena voltagem corrente alternada (CA) também é aplicada ao dispositivo. A voltagem total através dos terminais do diodo é portanto a soma da voltagem constante CD e a pequena voltagem CA. Já que a voltagem CA é pequena a voltagem total continua perto do nível CD. Existe uma distinção entre a resistência CD e a resistência CA. A resistência CD é, por definição, V/i , visto que a resistência CA é definida como dV/di . Em outras palavras, é a razão das variações de voltagem e corrente. Veremos que esta quantidade pode ser bem diferente da resistência CD em um diodo.

- Plote a curva da característica de um diodo no intervalo $V = 0 \dots 1$. Use o intervalo de y de $i = 0 \dots 10e-3$ (miliamperes).
- Ache a resistência CD do diodo quando voltagem aplicada é 0,5V
- Ache a resistência CD do diodo quando voltagem aplicada é 0,6V e 0,7V
- Ache a resistência CA do diodo quando voltagem aplicada é 0,5V
- Ache a resistência CA do diodo quando voltagem aplicada é 0,6V e 0,7V

Resolução:

(a) Usando os valores dados para I_s e V_0 , o comando plot é
>plot(1e-13(exp(V/0.027)-1), V = 0 .. 1, i = 0 .. 10e-3);

A corrente do diodo permanece bem pequena até que a voltagem através do dispositivo exceda 0.6 volts. Então o diodo liga e a corrente cresce rapidamente com uma voltagem ascendente. (Figura 4.4).

(b) A resistência CD do diodo quando a voltagem aplicada é 0.5V é achada aplicando a lei de Ohm. A corrente em $V = 0.5$ é

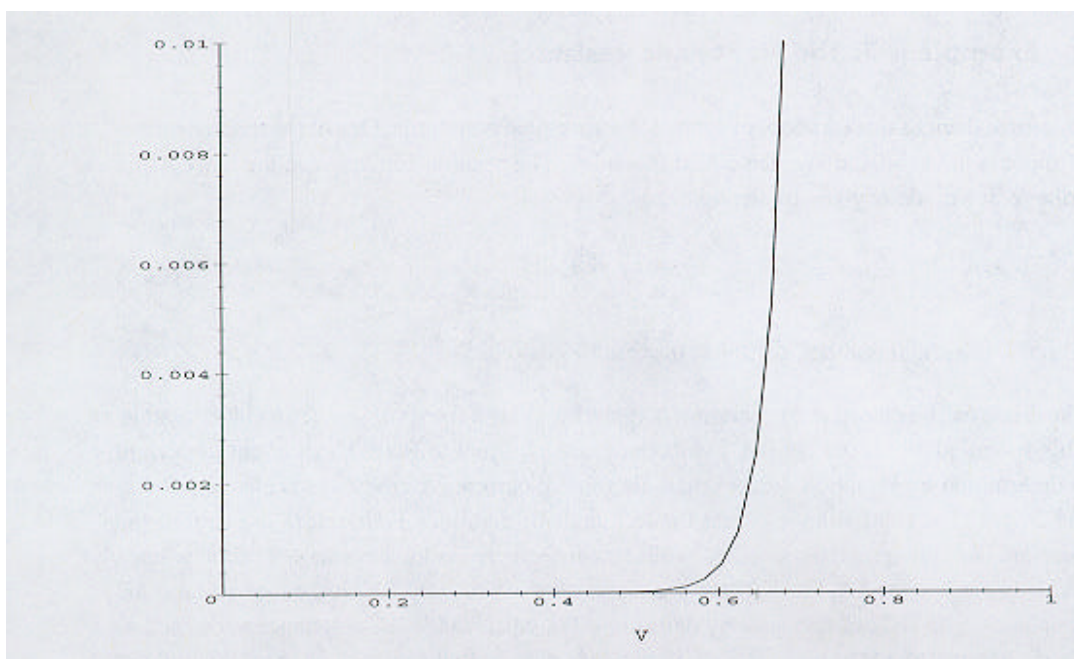


Figura 4.4 A curva da característica do diodo.

```
>evalf(0.5/subs(V = 0.5, 1e-13*(exp(V/0.027)-1)));
```

45339.80019

A resistência é acima de 45.000 ohms. Esta é uma alta resistência que demonstra que o diodo ainda não foi ligado.

(c) A resistência CD do diodo quando a voltagem aplicada é 0.6V e 0.7 V pode ser achada copiando e colando o comando em (b) e então mudando o valor de substituição por V.

```
>evalf(0.5/subs(V = 0.6, 1e-13*(exp(V/0.027)-1)));
```

1116.815721

```
>evalf(0.5/subs(V = 0.7, 1e-13*(exp(V/0.027)-1)));
```

27.50954674

A resistência cai rapidamente a medida que a voltagem aplicada cresce. Claramente, o dispositivo é não – ôhmico.

(d) A resistência CA do diodo quando a voltagem aplicada é 0.5V pode ser achada tirando a derivada. Queremos achar dV/di , mas, é mais fácil achar di/dV . Já que $dV/di = (di/dV)^{-1}$,

Na verdade não faz diferença qual derivada tirar. Chamando a corrente de C , nós definimos a expressão.

```
>C := 1e-13*(exp(V/0.027)-1;
```

$$C := .1 \cdot 10^{-12} e^{(37.0370374 \cdot V)} - .1 \cdot 10^{-12}$$

Vamos construir um comando Maple para avaliara dV/di . O primeiro passo é tirar a derivada di/dV . Depois, achar a recíproca da derivada, já que realmente, queremos dV/di . Então substituímos o valor $v = 0.5$ no resultado. Quase terminamos, mas paramos por aqui, o Maple não vai avaliar a expressão completamente, que contém um exponencial. Finalmente, usaremos `evalf` para reduzir tudo a um resultado decimal.

```
>dV/di = evalf(subs(V = 0.5, (diff(C, V))^(-1)));
```

$$\frac{dV}{di} = 2448.349188$$

A resistência CA é por volta de 2500 ohms, muito menos que a resistência CD . Lembre-se que esta é uma resistência para pequenas variações em torno do ponto operante em 0.5-V. (e)Ache a resistência CA do diodo quando a voltagem aplicada é 0.6V e 0.7V.

O comando foi elaborado na parte (d). Tudo que tem a ser feito é copiar e trocar o valor do ponto operante.

```
>dV/di = evalf(subs(V = 0.6, (diff(C, V))^(-1)));
```

$$\frac{dV}{di} = 60.30804891$$

```
>dV/di = evalf(subs(V = 0.7, (diff(C, V))^(-1)));
```

$$\frac{dV}{di} = 1.485515524$$

Em todos os casos a resistência CA é menor que a correspondente CD . A razão é facilmente vista quando plotamos a tangente da curva, que representa a condição CA , e unindo a linha da origem ao ponto operante, que representa a condição CD . Isto é mostrado na Figura 4.5

A inclinação da linha CD é muito menor que a inclinação da linha CA . Porém a resistência é a inversa da inclinação, então a resistência CA é muito menor que a de CD .

Máximo e Mínimo

O cálculo é muitas vezes usado os valores máximos e mínimos de uma função. Desde que a função seja contínua, você pode achar a derivada da função no seu intervalo definido

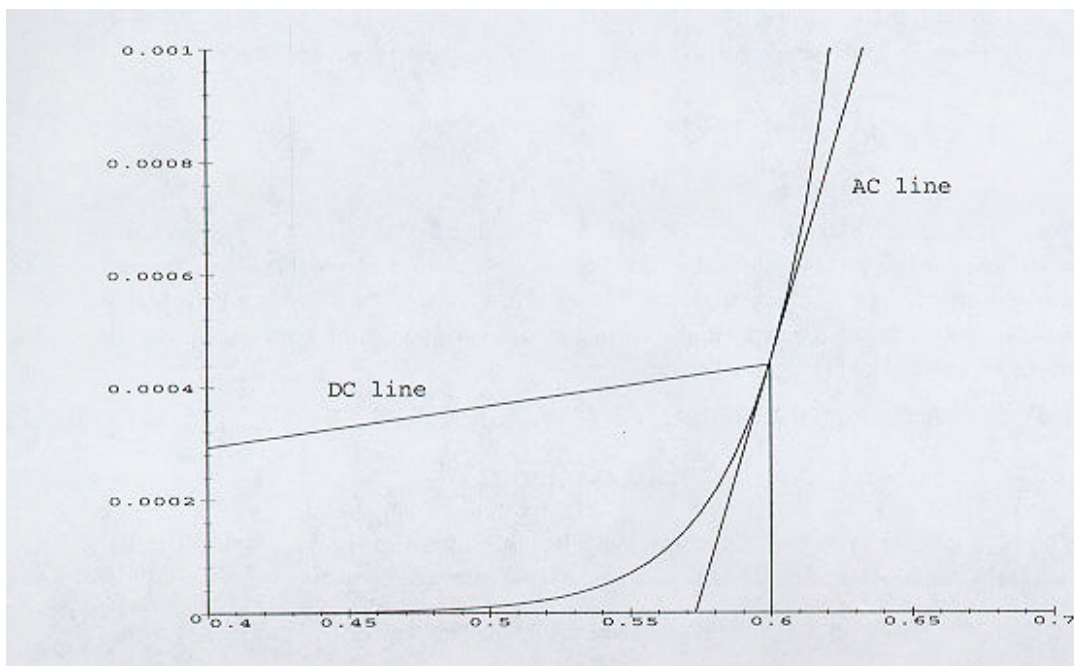


Figura 4.5 CA e DA linhas de resistência inversas do ponto operante $V = 0.6V$.

O ponto máximo ou mínimo de uma função caracterizado pelo fato que a derivada tem que ser zero nestes pontos. Considere o gráfico mostrado na figura 4.6. Para o domínio $0 < x < 1.6$, a função tem um valor máximo e dois lugares onde um mínimo local existe. O mínimo local é o ponto onde o valor da função é menor que os pontos próximos de cada lado.

As linhas tangentes nos pontos máximo e mínimo são mostradas na Figura 4.6. São linhas horizontais, e sua inclinação é zero. O fato da inclinação der zero ao no Máximo ou mínimo local pode ser usado para achar tais pontos se a fórmula função for conhecida.. Aqui estão os passos a serem seguidos. Vamos assumir que a variável independente é x .

1. Plote a função e verifique os pontos Máximo e mínimo. Você já pode estimar os valores pelo gráfico.
2. Ache a derivada da função.
3. Iguale a derivada a zero e resolva para x .
4. Verifique se o valor, ou valores, de x está dentro do domínio definido pelo problema.

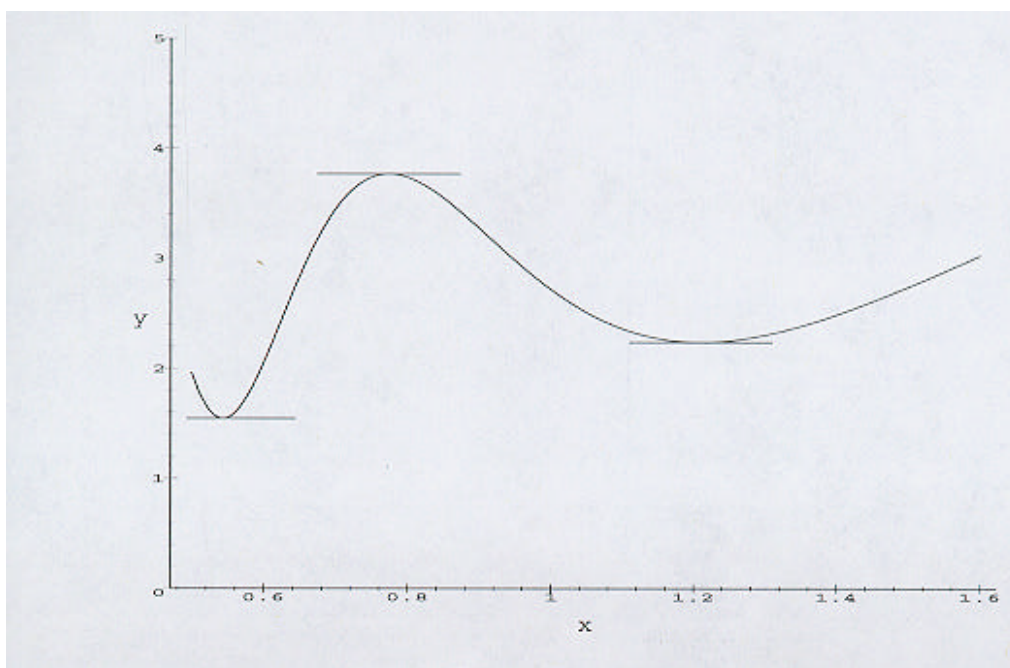


Figura 4.6 A função com uma máxima local e duas mínimas locais.

5. Certifique-se de ter encontrado todos os pontos máximos e mínimos. As vezes o comando `solve` não consegue encontrar uma solução e você tem que usar o `fsolve`. O comando `fsolve` geralmente precisa de ajuda para achar todas as soluções. Dê uma ajuda a ele fornecendo um intervalo dentro do qual procurar por uma solução. Por exemplo, o comando

>fsolve(f(x) = 0, x, x = 0 .. 2);

Faz com que o `fsolve` procure as soluções dentro do intervalo indicado.

6. Verifique sua solução re-substituindo.

Exemplo 4-8: Achando a Máxima e Mínima

Ache os pontos Máximo e mínimo da função $y = 2x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 23x + 92$.

Resolução defina a função para o Maple.

>f := x->2*x^4-3*x^3-24*x^2+23*x+92;

$$f := x \rightarrow 2x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 23x + 92$$

1. Plote a função para verificar a máxima e a mínima.

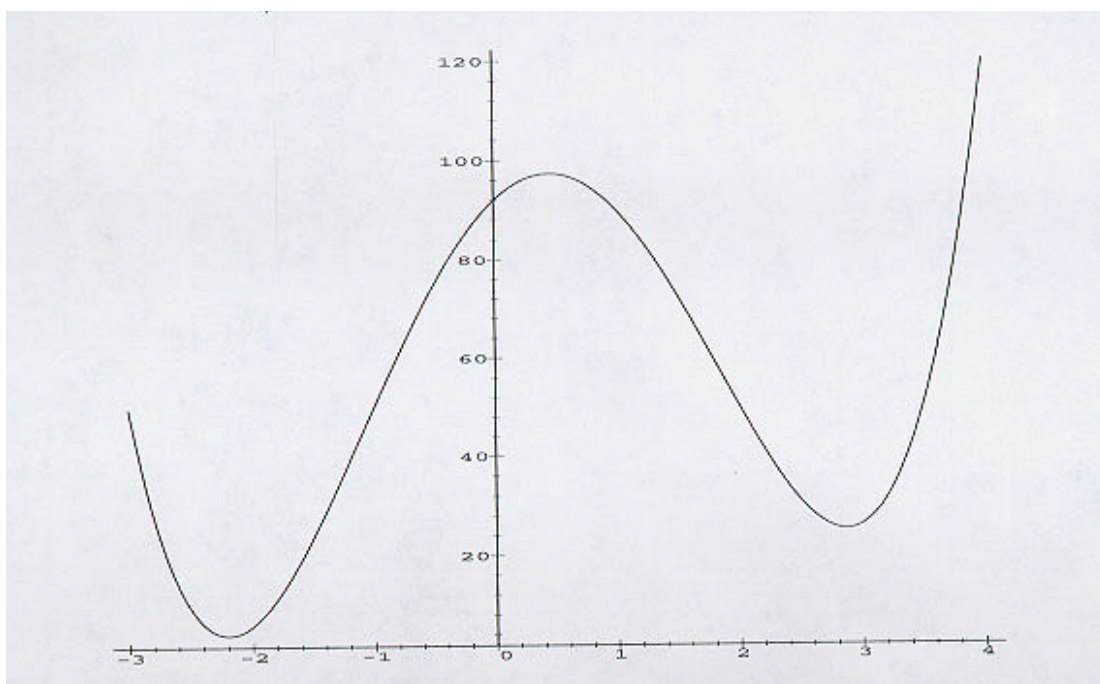


Figura 4.7 O gráfico de $y = 2x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 23x + 92$, mostrando a máxima e a mínima.

>plot(f, -3 .. 4);

O gráfico mostra que existem duas mínimas locais, em $x \approx -2$ e $x \approx 3$. Existe uma máxima local em $x \approx 1$ (Figura 4.7).

2 A derivada é

>D(f);

$$x \rightarrow 8x^3 - 9x^2 - 48x + 23$$

Deixamos a derivada em forma funcional. No próximo passo, usaremos a forma de expressão no momento de resolver a equação.

3 Tentamos o comando solve na equação $dy/dx = 0$.

>solve(D(f)(x) = 0, x);

$$\%1^{1/3} + \frac{137}{64} \frac{1}{\%1^{1/3}} + \frac{3}{8},$$

$$-\frac{1}{2} \%1^{1/3} - \frac{137}{128} \frac{1}{\%1^{1/3}} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} I \sqrt{3} \left(\%1^{1/3} - \frac{137}{64} \frac{1}{\%1^{1/3}} \right)$$

$$-\frac{1}{2} \%1^{1/3} - \frac{137}{128} \frac{1}{\%1^{1/3}} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} I \sqrt{3} \left(\%1^{1/3} - \frac{137}{64} \frac{1}{\%1^{1/3}} \right)$$

$$\%1 := -\frac{133}{512} + \frac{1}{64} I \sqrt{39901}$$

Ai!! O resultado é feio de duas maneiras. Primeiro que a expressão é muito complicada, e segundo que temos a aparição da quantidade I . O Maple usa I como a raiz de um número negativo, em outras palavras é uma quantidade imaginária. Sua aparição aqui não é nada bem vinda, pois sabemos pelo gráfico que as soluções para os pontos de inclinação zero são reais, não imaginários.

Podemos conseguir alguma ajuda convertendo a resposta para a forma decimal.

>evalf(solve(D(f)(x) = 0, x));

$$2.867679726, .1 \cdot 10^{-9} I, -2.198662672 - .1 \cdot 10^{-9} I, .4559829460 - .1 \cdot 10^{-9} I$$

A parte imaginária da solução é tão pequena que você pode concluir que é zero. Tente aproximar $Digits := 30$ e emita o comando novamente. Você verá que o termo imaginário é 10^{-29} ou desaparece.. Logo, ignorando as partes imaginarias da solução

$$2.867679726, -2.198662672, .4559829460$$

É uma boa idéia usar a função *fsolve*, que evita armadilhas como no exemplo acima. Aqui está a solução usando *fsolve*.

>sols := fsolve(D(f)(x) = 0);

$$\text{sols} := -2.198662672, .4559829460, 2.867679726$$

Exceto pelo ordem das soluções, o resultado é exatamente o mesmo que usando *solve*. Você tem que ter certeza que *fsolve* ache todas as soluções.

4-5. Os passos 4 e 5 não são necessários neste exemplo, pois o domínio é qualquer um e já mostramos o uso de *solve* e *fsolve*.

6. A re- substituição é a parte mais importante dos problemas. Neste ponto, temos três soluções, todas em precisão de dez dígitos. Porém, estes 10 dígitos são inúteis a não ser que estejam corretos. Para provar que estão vamos substituir os valores de x na expressão da derivada. Poremos todos os comandos na mesma linha.

```
>subs(x = sols[1], D(f)(x)), subs(x = sols[2], D(f)(x)), subs(x = sols[3], D(f)(x));
```

```
0, 0, .1 10-6
```

As primeiras duas soluções verificam perfeitamente, mas a terceira é correta até cinco casas decimais. Essa é mesmo a solução ou deveríamos estar procurando por algum outro número? Novamente você poderia indicar para o Maple trabalhar com um número maior de dígitos, como 30. Você teria que executar o comando *fsolve* novamente para obter as soluções com uma precisão maior. Então pode comparar a solução com o comando mostrado aqui. Você perceberá que agora a discrepância ocorre na 16^a. casa, confirmando que a máxima e a mínima forma encontradas.

Sua vez. Ache quando a derivada da função $y = 42 + 4x - 3x^2$ é 0. Neste ponto, a função é máxima ou mínima?

Resposta: _____

Funções para as Quais o Cálculo Não Funciona – Funções Descontínuas

O método de igualar a derivada a zero e resolver a equação apenas funciona para funções contínuas. Por exemplo, examine o gráfico na Figura 4.8. Tem um valor Máximo, mas este valor não pode ser achado igualando a derivada a zero.

A função na Figura 4.8 tem um passo de descontinuidade em $x = 1$. Também tem um valor Máximo em $x = 1$. Isto é fácil de calcular com a definição da função, que é

```
>f := x->ifx>1 then 4-x^2elsex+4fi;
```

```
f := proc(x) options operator, arrow; if i<x then 4-x^2
```

```
else x+4 fi end
```

A função é definida por duas fórmulas. Uma é válida desde que seja menor ou igual a 1 e a outra é válida se x for maior que 1. A função é definida e univalente para todos os valores de x , mas tem aquele passo de descontinuidade em $x = 1$. No gráfico de 4.8, é aparente que o valor Máximo é $f(1) = 5$, o que é facilmente verificado por uma avaliação.

```
>f(1);
```

5

Porém, o método de achar o valor máximo igualando a derivada a zero não funcionou.

```
>solve(D(f)(x) = 0, x);
```

```
error, (in unknown) cannot evaluate boolean
```

O gráfico da derivada mostra que ela não está nem próxima de zero no domínio especificado.

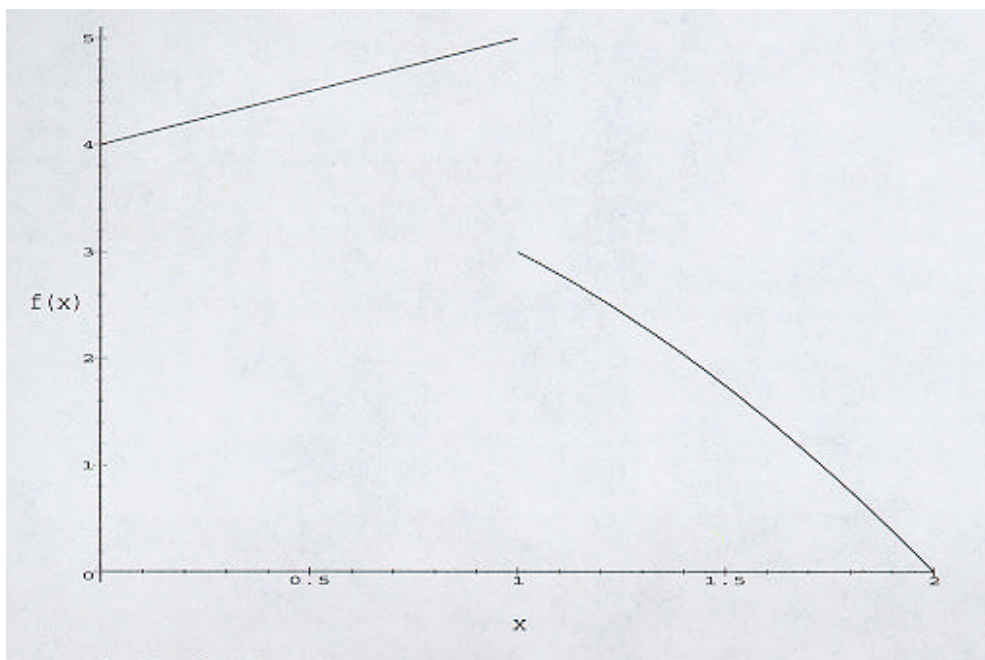


Figura 4.8 Plote de uma função descontínua

A derivada de uma função descontínua também é descontínua. Parte do gráfico é positiva, e parte negativa. Se fosse uma função contínua, existiria um valor de x no intervalo onde a função atingiria o valor zero mas, por conta da descontinuidade, isto não tem que acontecer.

Poderíamos mudar a definição apenas um pouquinho para fazer com que a função não tivesse mínima. Aqui está a definição:

```
f := x-> if x>=1 then 4-x^2 else x+4 fi;  
f(1);
```

3

Agora o valor da função em $x = 1$ é apenas 3. O valor da função a qualquer valor menor que um chega arbitrariamente perto de 5, pode-se pensar que a máxima da função seja 5, mas não é verdade.

```
>f(.99999);
```

4.99999

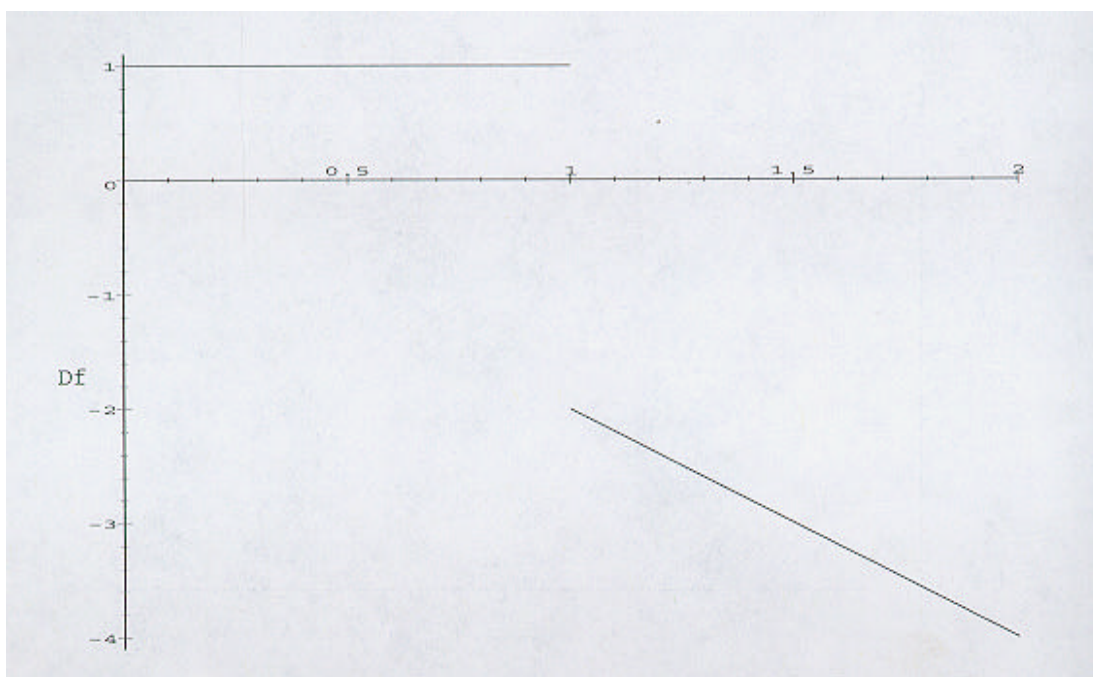


Figura 4.9 O gráfico da derivada da função descontínua para o exemplo 4-8

Conclusão: O método de igualar a derivada a zero funciona para funções contínuas, mas pode falhar em funções descontínuas. Como sempre, plote o gráfico antes de decidir o próximo passo.

Exercícios de Papel e Lápis

PP4-1: Voltagem versus Carga

Em um dispositivo eletrônico chamado capacitor, a voltagem, V , através do dispositivo é proporcional a carga em suas placas. A fórmula é $q = CV$. Em um outro tipo de dispositivo tem uma propriedade parecida com capacitância. Este dispositivo hipotético tem uma capacitância que é uma função de voltagem, dada pela equação $C = kV^2$. Ache a relação entre q e V , e depois ache dq/dV .

Resposta: _____

PP4-2: Energia Versus Temperatura

A fórmula para a quantidade de energia necessária para mudar a temperatura é dada pela equação 4.1. Se, numa determinada substância, é sabido que $Q = m(c_0 + c_1 T^3)T$, relacione o calor específico, c , às constantes c_0 e c_1 em $T = 100^\circ$.

Resposta: _____

PP4-3: Economia: Juros e Principal

Um investidor deposita \$10.000 em um fundo mutuo cuja taxa de juros varia pelo tempo de acordo com $i = 0.07 + 0.01t$, onde i é a taxa de juros e t é o tempo em anos. A fórmula para o crescimento do investimento é $P(t) = P(0)(1+i)^t$. Qual a taxa de variação do investimento, $dP(t)/dt$, quando $t = 1$ ano?

Resposta: _____

PP4-4: Variação Quadrática

A energia (E) armazenada no capacitor do problema PP4-1 é $E = \frac{1}{2}CV^2$. Ache $\frac{1dE}{CdV}$ em $V = 2V$.

Resposta: _____

PP4-5: Distância versus Tempo

A distância como função de tempo para um ÓVNI avistado em 1956 foi determinada sendo $d = 20t + 4t^2 + 3t^3$ (t em segundos, d em quilômetros). A qual velocidade estava o OVNI em $t = 3s$, de acordo com a fórmula?

Resposta: _____

PP4-6:

Tire a derivada novamente. Qual era a aceleração, em $t = 3s$, do ÓVNI no problema PP4-5?

Resposta: _____

PP4-7: Energia Versus Velocidade

A energia cinética de um corpo em movimento é $E = \frac{1}{2}mv^2$ (E em joules, m em Quilogramas, e v em metros por segundo). Qual a taxa de variação da energia em relação ao tempo se $dv/dt = 5t$?

Resposta: _____

PP4-8: Potência versus Corrente

A potência dissipada por um resistor é $P = Ri^2$, onde i é a corrente em amperes, R a resistência em Ohms, e P a potencia em watts. Use a lei de Ohm para achar dP/dV .

Resposta: _____

PP4-9: Taxa de Variação de Área com Raio em Um Círculo

(a) Ache a taxa de variação da circunferência de um círculo em relação ao seu raio.

Resposta: _____

(b) Ache a taxa de variação da área de um círculo em relação ao seu raio.

Resposta: _____

PP4-10: Variação de Ordem Superior

Calcule a primeira e a segunda derivada de $y = x^{5/3}$ em $x = 0$.

Resposta: _____

PP4-11 Variação Inversa

A relação volume – pressão de um gás contido em uma temperatura constante é $P = k/V$. Onde P está em Pascals e V em metros cúbicos. Ache dP/dt e mencione a unidade física de k.

Resposta: _____

PP4-12: Variação Trigonométrica

Sem a ajuda do Maple, ache $\frac{d(\sin^2 q)}{dq} + \frac{d(\cos^2 q)}{dq}$ e interprete o resultado.

Resposta: _____

PP4-13: Variação Exponencial

Dado $R(t) = R_0(1 - e^{-kt})$, ache $dR(t)/dt$ em $t = 1/k$.

Resposta: _____

PP4-14: Racionalizando o Numerador

Dado $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ache df/dx aplicando a fórmula para o quociente de diferença e racionalizando o denominador antes de $\Delta x \rightarrow 0$.

Resposta: _____

Maple Lab**ML4-1**

As medidas tiradas em uma pista de testes foram analisadas por um engenheiro, que descobriu, substituindo a informação a um polinômio cúbico, que a posição do carro poderia ser precisamente descrita por $s = -\frac{1}{5}t^3 + 10t^2 + 20t$, onde s é a distância em pés do ponto de partida, t é o tempo de movimento em segundos. O engenheiro verificou que a fórmula deu uma descrição precisa da posição do carro de $t = 0$ a $t = 30$ segundos.

O motorista do carro recebeu a instrução de utilizar a aceleração máxima inicialmente e então levemente diminuir a aceleração. Perto da metade do teste, o motorista deveria começar a frear, até o momento de realmente parar.

(a) Ache a velocidade do carro como uma função de tempo. Nomeie a velocidade de v . (A velocidade do carro é dada por $v = ds/dt$.)

Resposta: _____

(b) Ache a aceleração do carro como uma função de tempo. Nomeie a aceleração de a . (A aceleração do carro é dada por $a = dv/dt$, ou $a = d^2s/dt^2$.)

Resposta: _____

(c) Plote a distância, velocidade e aceleração no mesmo gráfico para o intervalo $t = 0 \dots 30$. (Seu comando deveria ser, `plot({s, m*v, n*a}, t= 0 .. 35);`, onde m e n são números que produzem um gráfico melhor.)

Resposta: _____

(d) Em que momento a velocidade está no máximo?

(i) Estime a velocidade máxima a partir do gráfico.

Resposta: _____

(ii) Compute a velocidade máxima resolvendo $dv/dt = 0$

Resposta: _____

(e) Em que momento a aceleração está no máximo? (lembre-se que você não pode usar a fórmula $dv/dt=0$ porque a aceleração máxima está em uma das extremidades do intervalo de tempo.)

Resposta: _____

(i) Leia a aceleração máxima a partir do gráfico.

Resposta: _____

(ii) Calcule a aceleração máxima por substituição na fórmula.

Resposta: _____

ML4-2

Um analista de investimentos prevê que o preço futuro das ações de uma companhia será $p = \frac{100t}{3t^2 + 25t + 100}$, onde p é o preço de cada ação em dólares e t é o tempo em dias. A meia noite de hoje é $t = 0$. Experiências passadas mostraram que as previsões deste analista são geralmente válidas para um período de três meses.

(a) Plote o preço das ações previsto pela fórmula. Desenhe o Gráfico aqui.

Resposta: _____

(b) Qual a perspectiva de longo prazo prevista por este modelo?

Resposta: _____

(c) Se a fórmula dá uma previsão precisa, quando, de acordo com o gráfico, é o melhor momento para vender as ações?

Resposta: _____

(d) Ache o máximo da expressão p resolvendo $dp/dt = 0$ para t .

Resposta: _____

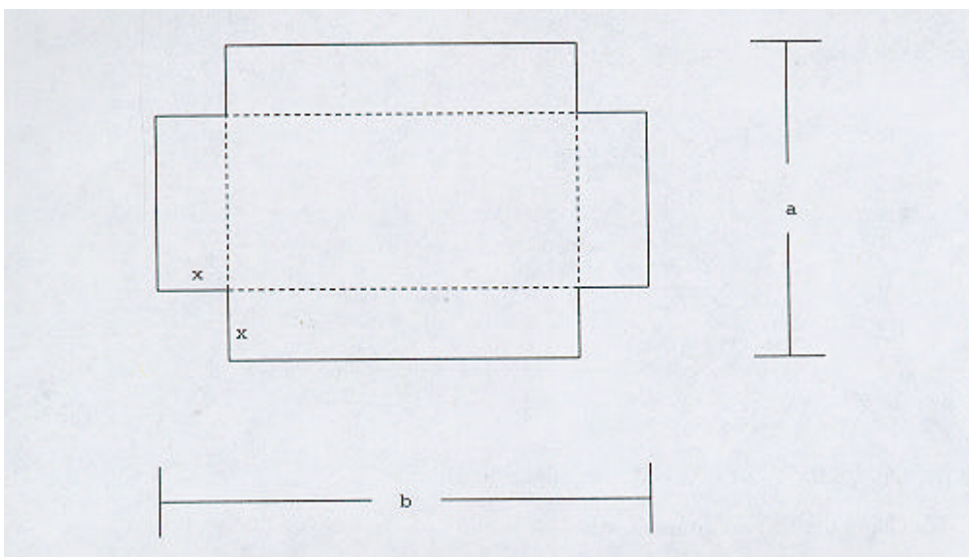


Figura 4.10 Dobrar as linhas pontilhadas para fazer uma caixa.

ML4-3

Um exercício clássico de otimização é encontrar o volume máximo de uma caixa, dadas algumas restrições nas dimensões. Um exemplo deste tipo de problema aparece quando uma caixa deve ser feita a partir de uma folha de papelão plana. Imagine esta folha retangular, e cortaremos quadrados de todos os cantos. Depois é só dobrar os lados e temos a caixa, como é mostrado na figura 4.10.

(a) Se os lados da folha de papelão são $a = 15\text{cm}$ e $b = 25\text{cm}$, derive a fórmula para o volume da caixa em termos de x . Dê à expressão o nome V .

Resposta: _____

(b) Plote o volume quando x varia de 0, obviamente o valor mínimo, até o valor máximo possível de x .

Qual é o valor máximo possível de x ?

Resposta: _____

(ii) Desenhe o gráfico aqui:

(c) Resolva para o valor de x que maximiza o volume.

(i) Usando o comando solve, x é:

Resposta: _____

(ii) Qual resposta do comando solve você descartou, e porque?

Resposta: _____

(d) Generalize o problema para uma folha cujos lados são indeterminados a e b . Escreva o volume como uma função de três variáveis, a , b e x .

(i) Defina (e nomeie) Vem função de x . A função conterá parâmetros a e b .

Resposta: _____

(ii) Você consegue plotar esta função?

Resposta: _____

(ii) Ache o valor de x que maximiza o volume. Dê uma solução simbólica.

Resposta: _____

ML4-4

Você está construindo uma cabana do formato de uma barraca canadense. A parte de trás da cabana dá para um lago, que tem um formato triangular, como mostra a Figura 4.11.

Você quer instalar uma janela panorâmica em forma de retângulo, pela qual você quer que entre a maior quantidade de luz possível. Isto significa que a área da janela tem que ser a máxima.

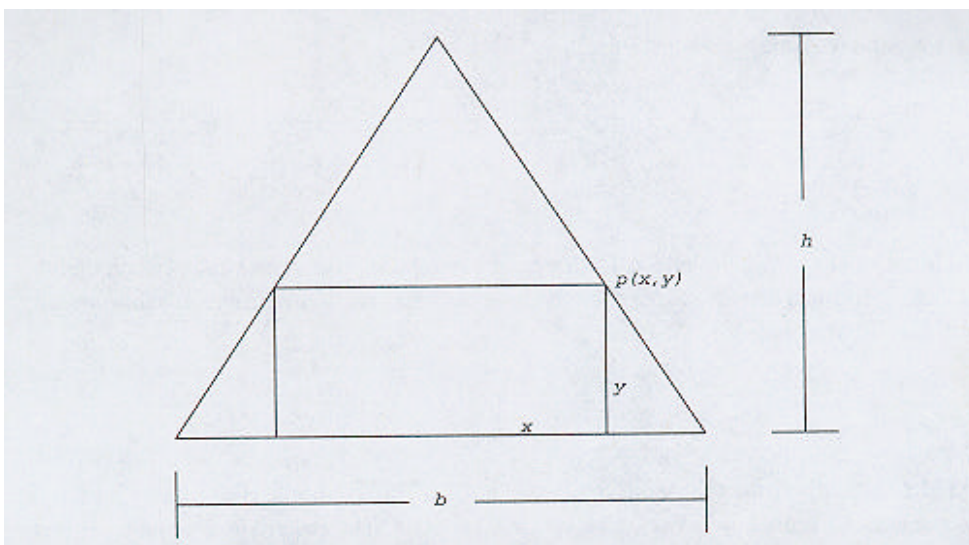


Figura 4.11 A janela panorâmica na cabana.

Digamos que $b = 25$ pés e $h = 20$ pés.

(a) Ache a coordenada y do ponto P em termos de x . (você tem que achara uma equação que represente a inclinação direita do telhado da cabana. Escolha a origem no ponto médio da cabana.)

(i) A inclinação desta linha é:

Resposta: _____

(ii) A interseção y da linha é:

Resposta: _____

(ii) A equação interseção – inclinação da linha reta é:

Resposta: _____

(b) Expresse a área da janela em termos de x . Lembre-se de dobrar a área do retângulo encontrado multiplicando as coordenadas do ponto P .

(c) Plote a área como função de x . Qual é o domínio de x para o plot?

Resposta: _____

(d)Ache a área máxima analiticamente.

Resposta:_____

ML4-5

A fazenda do velho MacDonald se encontra ao lado norte da margem do rio. Seu filho, estudante de matemática, determinou que o formato do leito do rio que delimita a extensão sul de sua propriedade pode ser aproximada pela curva

$$y + \frac{1}{100}x \left(\frac{1}{100}x - 5 \right) \left(\frac{1}{100}x - 20 \right) + 800$$

A propriedade se estende por duas milhas ao norte da margem do rio. A linha de sua propriedade ao longo do rio vai de $x = 0$ até $x = 2500$, onde x está em pés. As fronteiras leste e oeste da propriedade passam diretas de norte a sul. Isto é, a fronteira oeste é a linha $x = 0$ e a fronteira leste é a linha $x = 2500$ pés. A fronteira leste começa em aproximadamente $y = 900$ pés e a oeste começa em $y = 3309$ pés.

O fazendeiro tem 4000 pés de cercado. Por razões pessoais ele quer passar o cercado em linha reta da máxima local da margem do rio, próxima a $x = 0$, até um ponto ainda não determinado, e daí em outra linha reta à margem do rio mais uma vez, porém agora encontrando a margem em ângulo reto.

(a)Plote o formato da margem do rio para ter uma idéia do formato da parte sul da fazenda.

Resposta:_____

(b)O fazendeiro decide escolher o ponto $P(1500, 2500)$ como canto superior do cercado. Ele passa o cercado da máxima local, próxima de $x = 0$, até o ponto P , e daí até a margem próximo a $x = 2500$, onde a cerca encontra a margem em ângulo reto.

- (i) Ache o ponto da máxima local resolvendo $dy/dx = 0$. Forneça as coordenadas x e y .

Resposta:_____

- (ii) Ache a expressão geral para a inclinação da normal da margem do rio, em termos de x . Lembre-se: a inclinação da linha normal é $-1(dy/dx)$.

Resposta:_____

(c) Forme a expressão para a inclinação da linha unindo P ao ponto geral (x, y) na margem do rio, em termos de x .

Resposta: _____

(d) A linha que o velho MacDonald está procurando passa pelo ponto P e é perpendicular à margem do rio. Plote as expressões (bii) e (c) no mesmo gráfico e ache o ponto de interseção perto de $x = 2500$. Os valores de x e y neste ponto determinam o ponto no rio onde alinha normal passa pelo ponto P. Dê estes valores.

Resposta: _____

(e) Use a relação de Pitágoras para achar o comprimento total do cercado.

Resposta: _____

(f) O fazendeiro tem cerca o bastante para completar o seu projeto?

Resposta: _____

ML4-6

Você quer desenhar uma curva passando pelos pontos $(-3, 0)$, $(0, 0)$, e $(4, 0)$. A curva deve ter uma máxima local de dois em algum lugar no domínio $-3 < x < 0$ e deve ter uma mínima local no intervalo $0 < x < 4$. Ache uma cúbica possível nestas propriedades.

(a) Se a cúbica deve ter zeros em -3 , 0 , e 2 , a expressão cúbica deve ter fatores x , $(x+3)$, $2(x-2)$. Se tiver uma máxima local de 2 , a cúbica pode ser esticada verticalmente por um fator ajustável, k . Juntando tudo, defina a cúbica em termos do parâmetro k e dê o nome de y_1 .

Resposta: _____

(b) Tire a derivada da expressão em (a) e resolva para a coordenada x da máxima local.

Resposta: _____

(c) Na máxima local, o valor da expressão é 2 . Substitua o valor de x que você achou em (b) em y_1 para achar a componente y correspondente. Sua resposta será uma expressão contendo k . Iguale a expressão a dois e isole k .

Resposta: _____

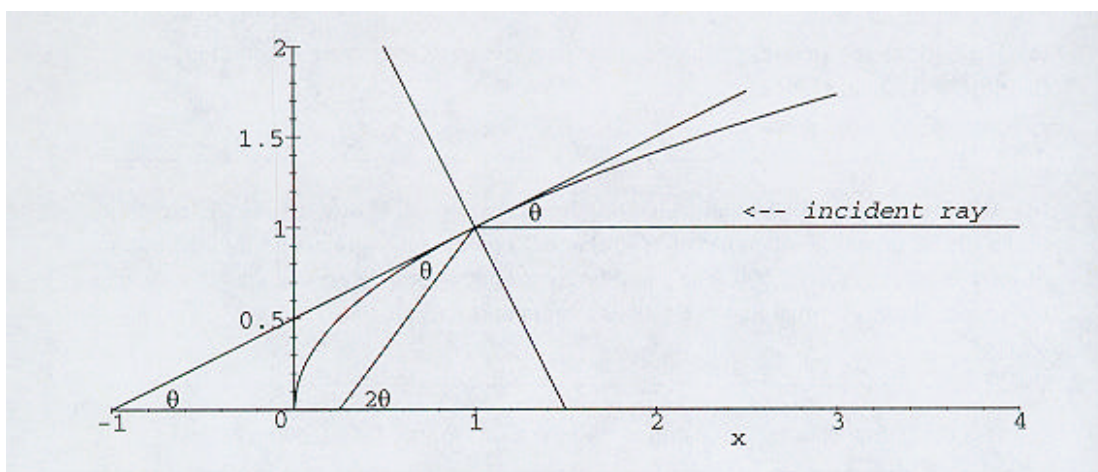


Figura 4.12 Diagrama para ML4-7

(d) Substitua este valor por k em $y1$ e plote o resultado para o intervalo $x = 3 \dots 2$. Desenhe a sua curva aqui. Ela tem todas as características pedidas?

Resposta: _____

ML4-7

Um refletor parabólico é dado pela equação $y = \sqrt{x}$. Ambos x e y são medidos em pés. Ela sofre a incidência de um raio laser horizontal da espessura de um lápis pela direita. Já que o raio é horizontal ele mantém uma altura constante, $y = c$, acima do eixo x (Figura 4.12).

(a) Ache as coordenadas do ponto onde o raio de luz atinge a superfície espelhada do refletor parabólico.

Resposta: _____

(b) Ache a inclinação da tangente da parábola no ponto onde o raio atinge a superfície. Chame este ângulo de q .

Resposta: _____

(c) Quando o feixe de luz é refletido pela superfície espelhada da parábola, ele atinge o eixo x a um ponto chamado foco. A lei da reflexão diz que o ângulo que o feixe refletido faz com a tangente é o mesmo ângulo que o raio incidente faz com a tangente. Demonstre por geometria elementar que a inclinação do raio refletido é $2q$.

Resposta: _____

(d) Ache a inclinação do raio refletido. Note: $\tan(2x) = 2\tan(x)/(1-\tan^2(x))$

Resposta: _____

(e) Ache a interseção x do raio refletido.

Resposta: _____

(f) A interseção x depende de c ? Se não, você pode concluir que qualquer raio que é paralelo ao eixo x passará pela mesma interseção x . Por esta razão, o ponto é chamado foco.

Resposta: _____

(g) Estique a parábola por um fator k . A equação se torna $y = k\sqrt{x}$. Que mudança isto faz no foco; isto é, onde o x intersecciona agora?

Resposta: _____

(h) Estique a parábola multiplicando x por k . A equação passa a ser $y = \sqrt{kx}$.

(i) Repita os passos que você usou para resolver o ponto focal no passo (g).

Resposta: _____

(ii) Existe uma forma de chegar à resposta sem repetir todos os passos na solução do Maple?

Resposta: _____

ML4-8

Digamos que você queira fazer uma calha a partir de uma folha de metal galvanizado. A folha tem formato retangular, com dimensões de 5 pés por 15 pés. Você quer dobrar o metal no formato de uma calha como mostra a Figura 4.13

(a) Digamos que $x = 1$ pé. Este problema pede para achar o ângulo q que maximiza a área da seção de choque da calha, permitindo que segure a maior quantidade de água possível quando soldarmos as extremidades. Sabendo o ângulo, você pode determinar a altura da calha e a largura da parte de cima.

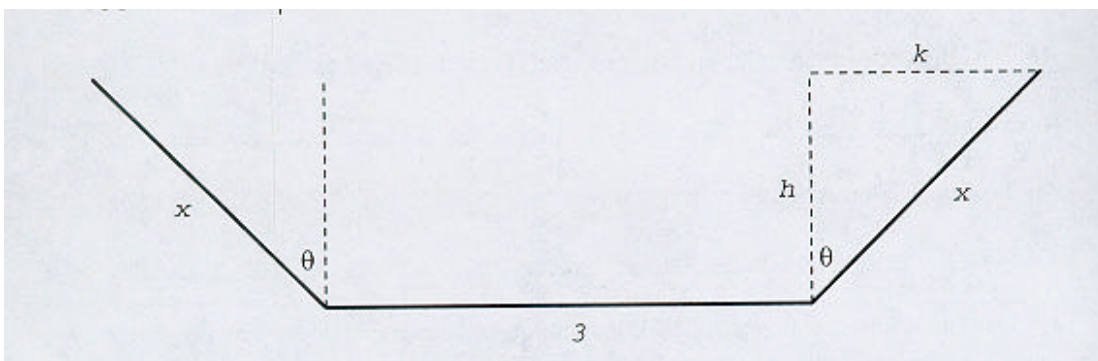


Figura 4.13 Visão lateral da calha no problema ML4-8

Desenhe o diagrama e nomeie as dimensões. Deixe o ângulo q como desconhecido.

(ii) Derive a fórmula para a área da seção de choque A baseado no ângulo q .

Resposta: _____

(iii) Ache dA/dq .

Resposta: _____

(iv) Transforma a equação em (iii) em uma contendo $\sin(q)$.

Resposta: _____

(v) Sendo $y = \sin(q)$. A substituição transforma a equação em (iv) em uma equação em y . Escreva a equação transformada aqui.

Resposta: _____

(vi) Ache o valor de y que maximiza (v).

Resposta: _____

(vi) A que ângulo (vi) corresponde?

Resposta: _____

- (vii) Já que o Maple trabalha com radianos, sua resposta para a parte (vii) é em radianos. Converta esta resposta para graus.

Resposta: _____

(b) Plote a função da área na parte (aii)

- (i) Ache o ângulo máximo graficamente.

Resposta: _____

- (ii) Converta q de radianos para graus.

Resposta: _____

ML4-9

No problema ML4-8, a base da calha é 3 pés. Neste problema porém, a base da calha é uma variável e pode ter qualquer comprimento entre 0 e 5 pés.

(a) Escreva a fórmula da área da seção de choque neste caso. Nomeie o resultado de A .

Resposta: _____

(b) A área A depende de duas variáveis, x e q . Se $x = 0$, a folha plana não tem lados. Se $x = 2.5$, a calha tem o formato de V. Qualquer valor de x entre estes formará a calha. Você esperaria que a calha com capacidade máxima satisfaria simultaneamente $dA/dx = 0$ e $dA/dq = 0$. Defina $>Ax := \text{diff}(A, x) = 0$; e $>At := \text{diff}(A, \text{Theta}) = 0$; Escreva as derivadas aqui.

Resposta: _____

Resposta: _____

(c) Resolva estas equações simultaneamente para x e q . Você terá varias opções para q . Do passo (b) você pode descartar qualquer solução onde $x = 0$ ou $x > 2.5$. Você pode descartar soluções onde $q < 0$ pois você sabe que o volume máximo será produzido por um ângulo positivo. Quando você se desfizer de todas estas possibilidades se deparará com um resultado um tanto estranho, $\arctan(1, \text{RootOf}(_Z^2-3))$. Esta expressão pode ser reduzida a um número decimal usando o comando `allvalues(theta=arctan(1, RootOf(_Z^2-3)))`; e então aplicando `evalf`.

Resposta: _____

Resposta: _____

(d) Plote a função em três dimensões usando `>plot3d(A, x = 0 .. 25, theta = 0 .. Pi/4, operatio=[90, 90], axés=normal, style=patchcontour)`; e `>plot3d(A, x = 0 .. 25, theta = 0 .. Pi/4, operatio=[0, 90], axés=normal, style=patchcontour)`; Observe que o gráfico alcança um máximo para ambos x e q . Você pode tentar outras orientações para ver melhor a forma da superfície, mas estas orientações dadas aqui permitem que você meça os valores máximos de x e de q .

(i) Estime o valor Máximo de x .

Resposta: _____

(ii) Estime o valor máximo de q .

Resposta: _____

(iii) As suas medições estão de acordo com os cálculos da parte (c)?

Resposta: _____

ML4-10

Um problema clássico em minimização é que um salva-vidas que pode correr a 6 milhas por hora ao longo da areia da praia e consegue nadar a 2 milhas por hora. Ele avista um banhista com problemas. O banhista está a 0.2 milhas a de distância do salva-vidas e 0.15 milhas de distancia da praia. O posto de observação está a 0.1 milha da água. A Figura 4.14 demonstra a situação.

O ponto X está no início da água, em algum lugar entre o posto de observação e o banhista. O salva-vidas consegue fazer cálculos bem rápidos. Ele rapidamente determina a localização do ponto X para que o tempo levado para alcançar o banhista seja mínimo. Vamos checar estes cálculos neste problema. Primeiro escolha um sistema de coordenadas. Vamos ter o ponto na linha da água ser a origem $(0, 0)$. Escolha esta linha como o eixo x . Logo o posto de observação do salva-vidas se encontra no eixo y e tem as coordenadas $A(0, -0.1)$. A localização do banhista é $B(0.2, 0.15)$.

(a) Que a coordenada do ponto X seja $(x, 0)$. Forme a expressão para a distância em linha reta do posto de observação, A , ao seu ponto de entrada na água, X .

Resposta: _____

(b) Forme a expressão da distância em linha reta de X ao banhista em B .

Resposta: _____

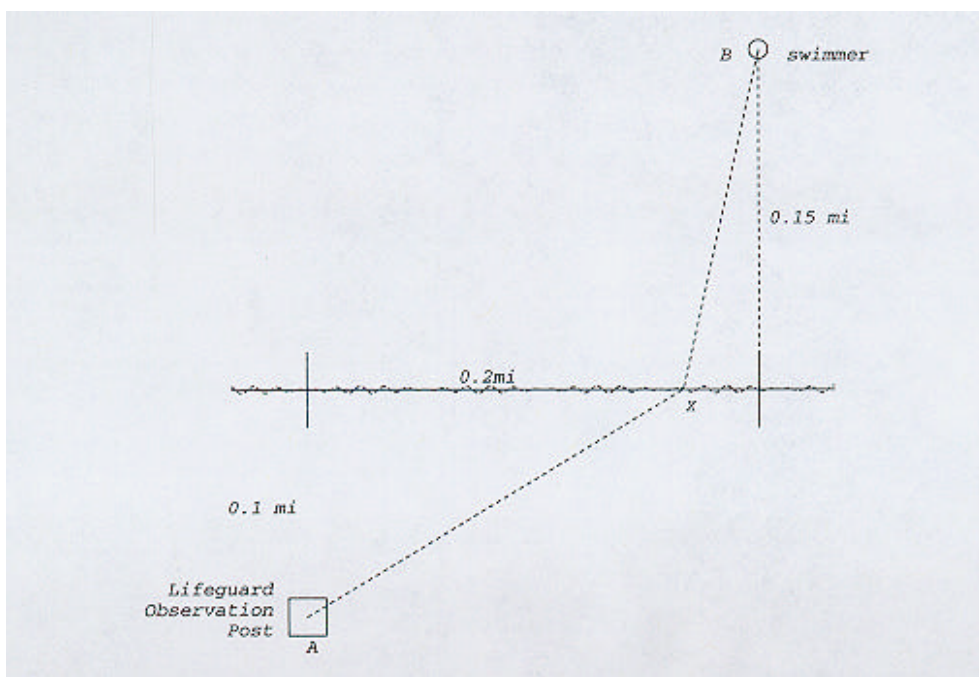


Figura 4.14 Diagrama para ML-4-10

(c) Sabendo as distâncias e as velocidades de corrida e natação do salva-vidas, forma as expressões, contendo o parâmetro x , para o tempo que leva para o salva-vidas alcançar o ponto X e então para o tempo que leva para alcançar o banhista. Nomeie as expressões de t_1 e t_2 .

Resposta: _____

(d) Plote a expressão para t_1 e t_2 , após escolha um domínio razoável para x .

Resposta: _____

(e) O Plot exibe um mínimo? Se sim, estime o valor de x que minimiza o tempo.

Resposta: _____

(f) Você ter dificuldades se usar o comando *solve* para encontrar o valor de x . É melhor usar *fsolve* neste problema. Já que você sabe que x deve ser entre 0 e 0.2, use o comando ,
`>fsolve(diff(t1+t2, x) = 0, x = 0 .. 0.2);` para achar o tempo mínimo em aproximação decimal.

Resposta: _____

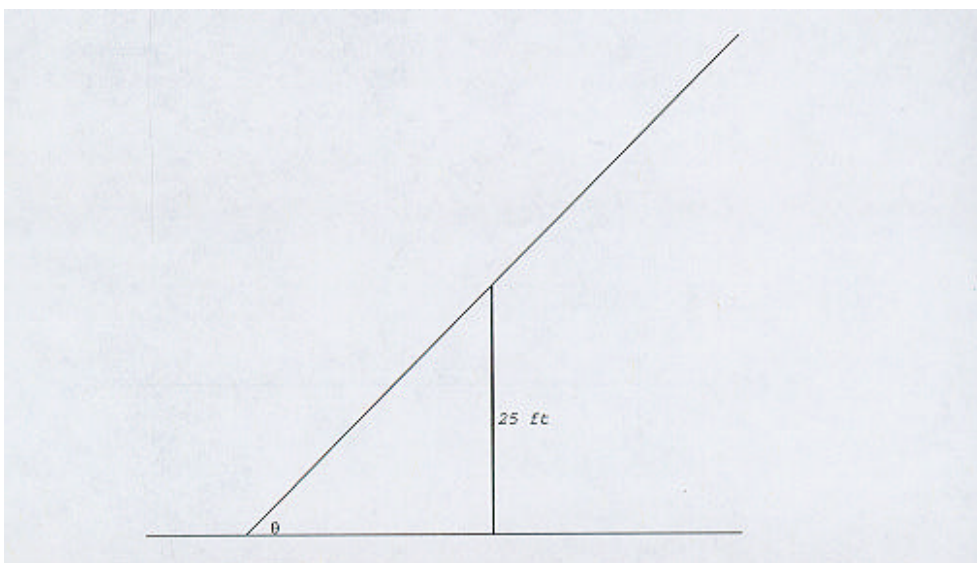


Figura 4.15 Diagrama para ML4-11

(g) Compare as duas formas de achar o mínimo.

(i) Qual é mais fácil?

Resposta: _____

(ii) Qual é mais precisa?

Resposta: _____

ML4-11

Digamos que você viva no sul, onde o sol está exatamente acima de você ao meio dia num dia de verão. Já que a Terra gira uma vez por dia, o ângulo do sol muda 0.25 graus por minuto. Um poste de 25 pés de altura produz uma sombra, exceto quando o sol está exatamente acima dele. O ângulo do sol é medido de forma que $q = 0^\circ$ ao amanhecer quando o sol está no leste e $q = \pi$ ao por do sol no oeste (Figura 4.15).

(a) Ache a fórmula para o comprimento da sombra em termos do ângulo q do sol. Escolha um sistema de coordenadas de forma que a base do poste esteja na origem $(0, 0)$. A ponta da sombra está no ponto $x, 0$, e a outra parte da sombra estará sempre ao ponto $0, 0$.

Resposta: _____

(b) Ache a razão na qual a sombra emitida pelo sol muda em função de q .

Resposta: _____

(c) Em que velocidade a sombra está mudando quando o ângulo é 15° , uma hora após o amanhecer?

Resposta: _____

(d) Em que velocidade a sombra estica, em pés por minuto, quando o sol está no ângulo $q = 165^\circ$, uma hora antes do pôr do sol?

Resposta: _____

(e) Em que velocidade a sombra está mudando ao meio dia?

Resposta: _____

(f) Na parte (e), o sol está diretamente acima, logo o comprimento da sombra é zero. Isto implica que a razão do crescimento da sombra deve ser zero? Explique.

Resposta: _____

ML4-12

Existe uma maneira de aproximar a raiz de uma equação numericamente calculando a linha tangente. É chamada de método de Newton.

Passo 1. Faça o gráfico da função para ter uma idéia de onde estão as raízes.

Passo 2. Escolha algum valor para x perto de uma das raízes. Calcule $f(x)$ e $df(x)/dx$.

Passo 3. Ache a interseção da linha tangente. Use a fórmula ponto – inclinação para a linha reta para construir a equação da linha. Já que $y = 0$ na interseção x já que as linhas passam por $(x, f(x))$, a fórmula ponto – inclinação $y - y_0 = m(x - x_0)$ passa a ser $-f(x) = (df(x)/dx)(x_i - x)$. Resolvendo para a interseção x , x_i , $x_i = x - f(x)/f'(x)$, onde $f' = df/dx$.

Passo 4. Já que a interseção x_i deveria ser mais próxima da raiz, use o valor de x_i como novo valor inicial e realize o passo 3 novamente para ter uma estimativa melhor. O processo no passo 3 pode ser automatizado usando o Maple.

Exemplo: Ache a raiz de $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ próximo de $x = 0.3$.

Resolução:

1. O Plot da expressão é mostrado na Figura 4.16.

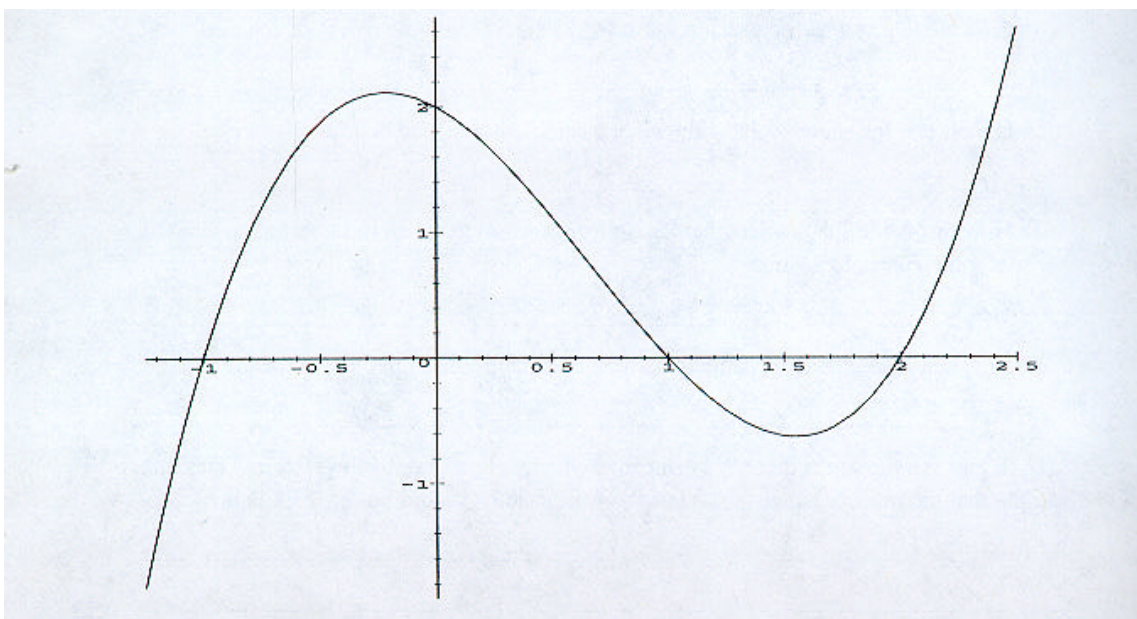


Figura 4.16 Plot da expressão

2. Defina $f := x^3 - 2x^2 - x + 2$; A derivada é $D(f)(x)$. Digamos que a raiz que você está procurando seja $x = 1$ e você inicia o processo em $x = 0.3$. A linha tangente e a interseção x são mostradas na Figura 4.17.

Perceba que a interseção x está bem próxima de 1 mesmo que a estimativa inicial seja 0.3, que não é muito próximo de 1. Você pode ver que você tem que chegar perto o bastante da raiz para que a linha tangente na sua estimativa inicial tenha uma inclinação que você chegará ainda mais perto. Se por acaso você escolheu um ponto perto da mínima ou da máxima local, a linha tangente vai ser quase paralela ao eixo x e estará no eixo x positivo ou negativo. Eventualmente você encontrará uma das raízes exteriores, mas não uma do meio.

3. Escreva a sua estimativa inicial para x e ache a interseção $x := x - f(x)/D(f)(x)$; Perceba que o x recebe um novo valor por este comando que facilita o cálculo da interseção.

>f := x->x^3-2*x^2-x+2;

$$f := x \rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2$$

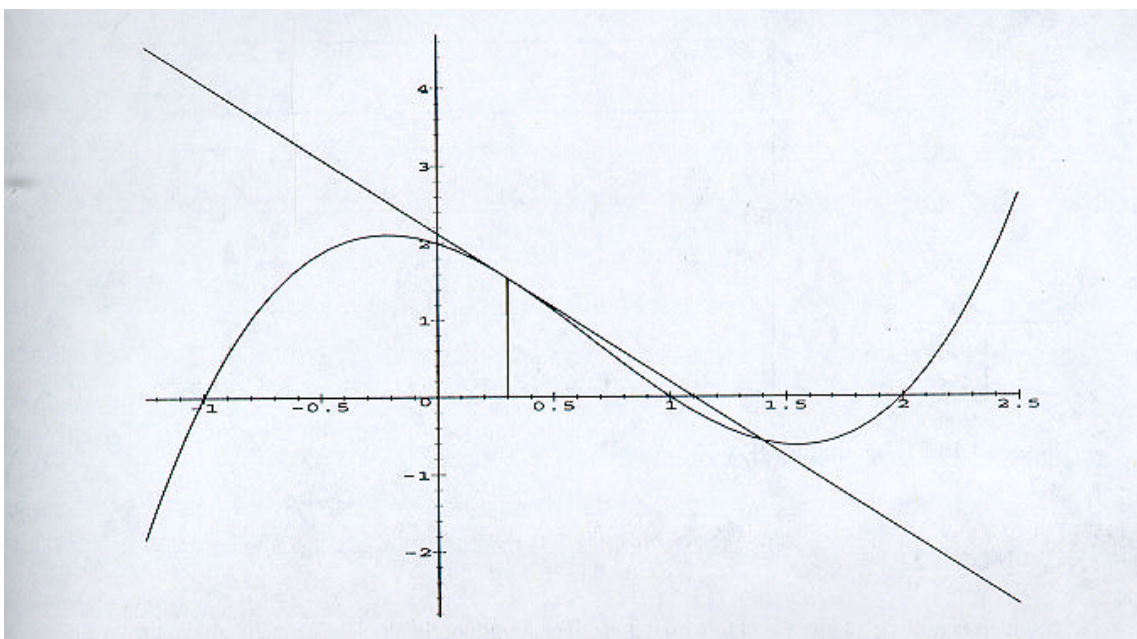


Figura 4.17 A linha tangente da interseção x .

`>x := 0.3;`

`>x := x-f(x)/D(f)(x);`

`x := 1.101554404`

4. Posicione o cursor no comando e pressione Enter, executando o comando novamente. Após alguma iterações, o resultado deve ser a raiz, com precisão de dez dígitos. Quando o comando é re-executado, a sequência de valores gerada é

.9929737484, .9999758310, .9999999999

Logo a resposta é precisa para dez dígitos após apenas quatro repetições do comando.

Use o método de Newton para achar todas as raízes reais das equações seguintes.

(a) $x^4 - 4.3x^3 + 1.1x + 25 = 0$

Resposta: _____

(b) $2.34x - 12.222 + 2\sin(x) = 0$

Resposta: _____

(c) $x^2 \cos(10x) = 0$

Resposta: _____

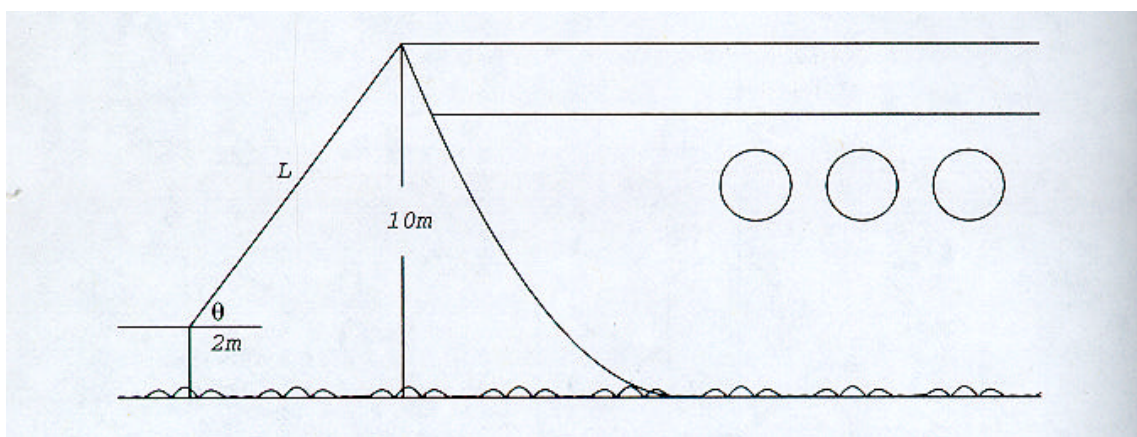


Figura 4.18 Diagrama para ML4-13

ML4-13

Um guincho está puxando um iate em direção das docas. A altura da doca é 2 metros acima da linha da água, e a corda está presa a uma haste na proa do barco que está a 10 m acima da linha da água. Sendo o comprimento da corda L . Digamos que o guincho esteja na mesma altura da doca (Figura 4.18).

(a) Que ângulo a corda faz com a horizontal quando o comprimento da corda entre o guincho e a haste é de 15 metros?

Resposta: _____

(b) O guincho está puxando a corda a 3 metros por minuto. Qual a taxa de variação do ângulo que a corda faz com a horizontal quando $L = 15\text{ m}$?

Resposta: _____

(i) O ângulo q está ficando maior ou menor?

Resposta: _____

(ii) Qual é dL/dt em centímetros por segundo? Perceba que se L está diminuindo com o tempo, dl/dt ficará negativa.

Resposta: _____

(iii) Numericamente qual é dq/dt em radianos por segundo quando $L = 15\text{ m}$?

Resposta: _____

(c) Em que velocidade o iate está se movendo neste momento? (Lembre-se que $\cos(q) = x/L$). Aplique a regra da cadeia para achar a velocidade dx/dt em termos de L e q , e então substitua os valores conhecidos por L e q , para obter o resultado final.

Resposta: _____

(d) qual a velocidade do movimento do iate quando $L = 10$ m?

Resposta: _____

(e) A velocidade do iate aumentou ou diminuiu a medida em que se aproximou da doca?

Resposta: _____

(f) Desenhe o gráfico da velocidade do iate para $L = 30$ metros até $L = 10$ metros.

ML4-14

Galileu (1564-1642) propôs que um corpo em queda obedeceria a equação expressada na notação moderna como $s = 1/2gt^2$, onde g é a aceleração devida a gravidade de aproximadamente 10 metros por segundo ao quadrado.

(a) Faça o gráfico da velocidade, $v = ds/dt$, em função do tempo de $t = 0$.. 10 segundos. Desenhe o gráfico aqui. Qual o formato da curva de velocidade?

Resposta: _____

(b) Faça o gráfico de aceleração, $a = dv/dt = d^2s/dt^2$, pelo mesmo intervalo de tempo. Qual é a característica desta curva?

Resposta: _____

(c) Dê as formulas para velocidade e aceleração.

Resposta: _____

ML4-15

A fórmula de Galileu é precisa para um objeto caindo num vácuo por uma distância curta. Porém, a resistência do ar caía mais devagar do que a fórmula prevê. Uma equação um pouco mais realística envolvendo o caso de um paraquedista antes de abrir o para- quedas é $s = 38.1 t + 148.e^{(-.257t)} - 148$, onde s é em metros e t em segundos. Esta fórmula contém um valor mais preciso para g , e prevê a velocidade terminal . Quando a velocidade do paraquedista aumenta, a pressão do ar produz força o bastante para equilibrar a força gravitacional. A esta velocidade, a velocidade do paraquedista é uma constante chamada velocidade terminal.

(a)Determine as expressões para velocidade e aceleração.

Resposta:_____Resposta:_____

(b)Plote, no mesmo gráfico, a distância percorrida neste caso, onde a resistência do ar faz seu efeito aparente, e a distância percorrida dada pela expressão em ML4-14 para queda livre no vácuo. Desenhe o gráfico aqui e ache a distância que o paraquedista vai cair após 10 segundos sem a resistência do ar._____

Resposta:_____

(c)Plote as duas velocidades, uma com a resistência do ar e a outra sem, no mesmo gráfico. Desenhe o gráfico aqui e ache a velocidade que o paraquedista vai estar caindo após 10 segundos com e sem a resistência do ar.

Resposta:_____

(d) Plote as duas velocidades, uma com a resistência do ar e a outra sem, no mesmo gráfico. Desenhe o gráfico aqui e ache a aceleração que o paraquedista vai estar caindo após 10 segundos com e sem a resistência do ar.

Resposta:_____

(e)Qual é a velocidade terminal, em metros por segundo e milhas por hora?

Resposta:_____Resposta:_____